L'oral à l'agreg - Isenmann p. 134
Calcul Intégral - Faraut p. 137

# Théorème de Plancherel

207 208 235
234 201 239
250 205

**Théorème :** $\mathcal{F} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \left[\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx\right] \end{array}$ est bijective.

**Théorème :** Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Alors : $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

**Proposition :** Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ avec $E,F$ deux $\mathbb{R}$-ev.
Alors : $f$ est continue ssi $f$ est uniformément continue

**Théorème : (de Riesz-Fischer)** Soit $p \in [1;+\infty[$.
Alors : $L^p(\mathbb{R})$ est complet

**Théorème : (de prolongement des applications uniformément continues)** Soit $E,F$ espaces métriques tels que $F$ est complet, $A \subseteq E$ dense dans $E$ et $f : A \to F$ application uniformément continue.
Alors : $\exists \tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge $f$ à $E$.

**Théorème :** Soit $\mathcal{P} : \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \\ f \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) \end{array}$.

Alors : $\mathcal{P}$ est bien définie et il existe un unique prolongement isomorphique, isométrique de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$.

**Preuve :**
Il s'agit de montrer 3 points :
1. $\mathcal{P}$ admet un unique prolongement à $L^2(\mathbb{R})$
2. $\mathcal{P}$ est une isométrie linéaire
3. $\mathcal{P}$ est injective et surjective (avec un peu de travail pour montrer que $\mathrm{Im}(\mathcal{P})$ est fermé et dense dans $L^2(\mathbb{R})$ pour montrer la surjectivité)

① $\mathcal{P}$ admet un unique prolongement à $L^2(\mathbb{R})$
Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, $\mathcal{P}$ l'est aussi.
Par le théorème, $\forall f \in S(\mathbb{R})$, $\|\mathcal{F}(f)\|_2^2 = 2\pi \|f\|_2^2$
et alors $\mathcal{P}$ est continue.
Par la proposition, $\mathcal{P}$ est alors uniformément continue.
Par ailleurs, par le théorème de Riesz-Fischer, $L^2(\mathbb{R})$ est complet et $S(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. ← car $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \subseteq S(\mathbb{R})$ et $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
Par le théorème de prolongement des applications uniformément continues, il existe un unique prolongement de $\mathcal{P}$ à $L^2(\mathbb{R})$ que l'on note abusivement $\mathcal{P}$.

② $\mathcal{P}$ est une isométrie linéaire
Soit $(f_n) \in S(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \to f \in L^2(\mathbb{R})$
Par continuité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(f_n) \to \mathcal{P}(f)$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|\mathcal{P}(f_n)\|_2 = \|f_n\|_2$ et alors $\|\mathcal{P}(f)\|_2 = \|f\|_2$.

③ $\mathcal{P}$ est injective et surjective
- Soit $f,g \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $\mathcal{P}(f) = \mathcal{P}(g)$
  Par linéarité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(f-g) = 0$
  Or : $\|\mathcal{P}(f-g)\|_2 = \|f-g\|_2 = 0$ i.e. $f=g$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

- ▲ $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est un fermé de $L^2(\mathbb{R})$.
  Soit $(f_n) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{P}(f_n) \to g \in L^2(\mathbb{R})$.
  En particulier, $(\mathcal{P}(f_n))$ est de Cauchy.
  Montrons que $(f_n)$ est aussi de Cauchy
  Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que :
  $\forall n \geq N, \forall p \geq 0$, $\|\mathcal{P}(f_{n+p}) - \mathcal{P}(f_n)\|_2 \leq \varepsilon$
  Par isométrie de $\mathcal{P}$, $\|f_{n+p} - f_n\|_2 \leq \varepsilon$
  Ainsi, $(f_n)$ est de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ qui est complet
  Il existe alors $f \in L^2(\mathbb{R})$ tel que : $f_n \to f$.
  Par continuité de $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}(f_n) \to \mathcal{P}(f)$ et par unicité de la limite, $\mathcal{P}(f) = g$.
  Ainsi, $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est bien fermé dans $L^2(\mathbb{R})$.

- ▲ $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$
  Soit $f \in S(\mathbb{R})$. Puisque $\mathcal{F} : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ est bijective,
  $\exists g \in S(\mathbb{R}) \setminus f = \mathcal{F}(g) \in S(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$.
  Ainsi, $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$.

- ▲ $\mathcal{P}$ est surjective
  $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{P}(L^2(\mathbb{R})) \subseteq L^2(\mathbb{R})$ avec $S(\mathbb{R})$ dense dans $L^2(\mathbb{R})$.
  Alors $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on a
  Comme $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R}))$ est fermé dans $L^2(\mathbb{R})$,
  alors $\mathcal{P}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$, d'où la surjectivité.

Théorème : $\mathcal{F}: \begin{array}{l} S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R}) \\ f \mapsto [\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} f(x)dx] \end{array}$ est bijective.

Preuve :

- Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, $\mathcal{F}(f)$ est infiniment dérivable et par des IPP, on a : $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $\forall y \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{F}(f)^{(k)}(y) = \mathcal{F}(x \mapsto (-2i\pi x)^k f(x))(y) = o\left(\frac{1}{|y|^n}\right)$
Alors $\mathcal{F}(f) \in S(\mathbb{R})$. i.e. $\mathcal{F}(S(\mathbb{R})) \subseteq S(\mathbb{R})$
En particulier, $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R})$ et par le théorème d'inversion de Fourier, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x)$
Alors : $\forall g \in S(\mathbb{R})$, $g = \mathcal{F}(f)$ avec $f(x) = \mathcal{F}(g)(-x)$ i.e. $S(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(S(\mathbb{R}))$
Ainsi, $\mathcal{F}(S(\mathbb{R})) = S(\mathbb{R})$ ie $\mathcal{F}$ est surjective.
- Puisque $\mathcal{F}$ est linéaire, vérifions que $\ker(\mathcal{F}) = \{0\}$.
Soit $f \in S(\mathbb{R})$ telle que $\mathcal{F}(f) = 0 \in L^1(\mathbb{R})$.
Par le théorème d'inversion, $f = \mathcal{F}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}(0) = 0$.
Alors $\mathcal{F}$ est injective.

Théorème : Soit $f \in S(\mathbb{R})$.
Alors : $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$

Preuve :

- Soit $f, g \in S(\mathbb{R})$. Par les théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini, $\int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(g)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(y) g(y) dy$. $(*)$
- Montrons que $\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(g)(x)} dx$
Par le théorème d'inversion, $\overline{g} = \mathcal{F}(h)$ ssi $h = \mathcal{F}^{-1}(\overline{g})$

Or : $\mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} \overline{g(t)} dt$
$= \frac{1}{2\pi} \overline{\int_{\mathbb{R}} e^{-itx} g(t) dt}$
$= \frac{1}{2\pi} \overline{\mathcal{F}(g)(x)}$

Ainsi, par ce qui précède en $(*)$, on a :
$\int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathcal{F}(h)(x) dx$
$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) h(x) dx$
$= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \mathcal{F}^{-1}(\overline{g})(x) dx$
$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(g)(x)} dx$

Finalement, en appliquant ceci à $f = g$, on a :
$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx$ ie $\|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(f)\|_2^2$.

Proposition : Soit $f \in \mathcal{L}(E; F)$ avec $E, F$ deux $\mathbb{R}$-ev.
Alors : $f$ est continue ssi $f$ est uniformément continue

Preuve :

$\Leftarrow$ Oui

$\Rightarrow$ Supposons $f$ continue.
En particulier, $f$ est continue en $0$
ie. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0 \mid \forall x \in E$, $\|x\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon$
Soit $\eta > 0$ et $x, y \in E$ tels que $\|x - y\| \leq \eta$
Ainsi, $\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x-y)\| \leq \varepsilon$
d'où l'uniforme continuité.

Théorème : (de Riesz-Fischer) $\forall p \in [1; +\infty[$, $L^p(\mathbb{R})$ est complet.

Preuve :
idée : utiliser le fait que $E$ est de Banach ssi toute série absolument convergente est convergente.

- Soit $\sum u_n$ série Absolument convergente
Alors $\forall$p.p. $x \in \mathbb{R}$, $\| \sum |u_n(x)| \|_p < +\infty$ et ainsi, $\forall$p.p. $x \in \mathbb{R}$, $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$.
- Soit $U(x) = \begin{cases} \sum u_n(x) & \text{si } \sum |u_n(x)| < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
Ainsi, $\|U - \sum_{k=0}^{n} u_k\|_p \leq \|\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k| \|_p \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_p \xrightarrow[+\infty]{} 0$
ie. $\sum u_n$ converge dans $L^p(\mathbb{R})$.

Théorème : (de prolongement des applications uniformément continues) Soit $E, F$ espaces métriques, $F$ complet, $A \subseteq E$ dense et $f : A \to F$ uniformément continue.
Alors $\exists! \tilde{f} : E \to F$ uniformément continue qui prolonge $f$.

Preuve :
Soit $x \in E$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to x$.
En particulier, $(a_n)$ est de Cauchy dans $A$.
Puisque $f$ est uniformément continue, alors $(f(a_n))$ est de Cauchy dans $F$ qui est complet.
Ainsi, $f(a_n) \to y \in F$.
Soit $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $b_n \to x$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$
Montrons que $f(b_n) \to y$.
de l'uniforme continuité.
Ainsi, $d(f(b_n); y) \leq d(f(b_n); f(a_n)) + d(f(a_n); y)$
$\leq 2\varepsilon$

Soit $\tilde{f}(x) = y$ et $\forall z \in A$, $\tilde{f}(z) = f(z)$.
Montrons que $\tilde{f}$ est uniformément continue.
Soit $x, z \in E$ telle que $d(x; z) \leq \frac{\eta}{2}$ et $(a_n), (b_n)$ deux suites telles que $a_n \to x$ et $b_n \to z$.
$\exists N \in \mathbb{N} \mid d(a_N; b_N) \leq \eta$ et donc : $\forall n \geq N$, $d(f(a_n); f(b_n)) \leq \varepsilon$ et $d(f(a_n); f(b_n)) \to d(\tilde{f}(x); \tilde{f}(z))$
d'où l'uniforme continuité.

Temps : 11' 14'' speechless